



## Определение плотности наноразмерных частиц методом седиментации

Х.С.М. Р. Хуссейн<sup>1</sup>,

В. А. Куклин<sup>2</sup>, М. Ш. Салахутдинов<sup>3</sup>, И. И. Нуреев<sup>3</sup>

<sup>1</sup> University of Karbala, Karbala, Iraq

<sup>2</sup> Казанский федеральный университет, г. Казань, Республика Татарстан, Россия

<sup>3</sup> Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева г. Казань, Республика Татарстан, Россия

В статье предложена математическая модель измерения плотности наноразмерных частиц, используемых в качестве наполнителя в композитных материалах. Математическая модель описывает связь между постоянной времени седиментации, плотностью, вязкостью жидкости с плотностью и диаметром наноразмерных частиц. Модель учитывает влияние сил тяжести, гидростатической подъемной силы, сил сопротивления движению. Концентрация наноразмерных частиц оценивается на основе моделирования рэлеевского рассеяния. Получены аналитические зависимости, позволяющие оценить среднее значение плотности отдельных наноразмерных частиц при известных их размерах или характерный диаметр наноразмерных частиц при известной их плотности на основе экспериментально определяемой постоянной времени седиментации.

**Ключевые слова:** седиментация, осаждение частиц в жидкости, измерение молекулярной массы, измерение диаметра наноразмерных частиц, измерение концентрации, рэлеевское рассеяние

Статья получена: 21.01.2021  
Принята к публикации: 15.02.2021

## Determination of the Density of Nanosized Particles by Sedimentation Method

H. S. M.R. Hussein<sup>1</sup>,

V. A. Kuklin<sup>2</sup>, M. Sh. Salakhutdinov<sup>3</sup>, I. I. Nureev<sup>3</sup>

<sup>1</sup> University of Karbala, Karbala, Iraq

<sup>2</sup> Kazan Federal University, Kazan, Republic of Tatarstan, Russia

<sup>3</sup> A. N. Tupolev Kazan National Research Technical University, Kazan, Republic of Tatarstan, Russia

The article proposes a mathematical model for measuring the density of nanosized particles. The mathematical model describes the relationship between the sedimentation time constant, density, fluid viscosity with density and diameter of nanosized particles. The model takes into account the influence of gravity forces, hydrostatic lifting force, forces of resistance to motion. The concentration of nanosized particles is estimated based on Rayleigh scattering simulations. Analytical dependences have been obtained that make it possible to estimate the average density of individual nanosized particles at their known sizes or the characteristic diameter of nanosized particles at their known density based on the experimentally determined sedimentation time constant.

**Keywords:** sedimentation, sedimentation of particles in a liquid, measurement of molecular weight, measurement of the diameter of nanosized particles, concentration measurement, Rayleigh scattering

Received: 21.01.2021  
Accepted: 15.02.2021



## ВВЕДЕНИЕ

Широкое использование наноразмерных частиц в качестве наполнителей дисперсно-армированных полимерных композитных материалов обусловлено существенным повышением механических характеристик композитов при малой (по массе) концентрации частиц наполнителя [1, 2, 3]. Один из эффективных методов поиска новых композиций, обладающих требуемыми механическими характеристиками, основан на математическом моделировании [4, 5]. В общем случае выделяют два подхода к построению математических моделей дисперсно-армированных полимерных композитных материалов. Первый подход, макроскопический, основан на использовании традиционного аппарата механики полимеров [4, 6, 7], второй – микроскопический, основан на применении аппарата молекулярной динамики [8, 9]. Применение аппарата механики полимеров является наиболее целесообразным, несмотря на целый ряд ограничений. Так, использование этого подхода требует информации о механических характеристиках (например модули упругости, коэффициент Пуассона) наноразмерных частиц [10]. На практике механические характеристики наноразмерных частиц возможно определить далеко не всегда. Это обусловлено тем, что измерение этих характеристик порой невозможно из-за малого диаметра наноразмерных частиц. Математические методы их предсказания зачастую связаны с решением обратных задач, требующих строгого доказательства единственности их решения, что усугубляется отсутствием априорной информации об их механических характеристиках. Также следует отметить, что структура наноразмерных частиц может отличаться от структуры микрочастиц того же сорта, следовательно, и механические свойства этих частиц также будут различны. Попытки оценки плотности смеси частиц и жидкости делались на основе анализа зависимости коэффициента преломления от концентрации [11, 12, 13], но они основаны на крайне дорогостоящих инструментах измерения центральной длины волны волоконной брэгговской решетки. В связи с этим актуальным является использование косвенных методов определения приближенных значений физико-технических характеристик наноразмерных частиц, которые на практике позволят ограничить область поиска решения обратных задач.

Одним из важных параметров наноразмерных частиц является их плотность, зная которую можно определить диапазон некоторых их механических характеристик. Цель настоящей работы состоит

## INTRODUCTION

The widespread use of nanosized particles as fillers for dispersion-reinforced polymer composite materials is due to a significant increase in the mechanical characteristics of composites at a low (by weight) concentration of filler particles [1, 2, 3]. One of the effective methods for finding new compositions with the required mechanical characteristics is based on mathematical modeling [4, 5]. In general, there are two approaches to the construction of mathematical models of dispersion-reinforced polymer composite materials. The first approach, macroscopic, is based on the use of the traditional apparatus of polymer mechanics [4, 6, 7], the second is microscopic, which is based on the use of the apparatus of molecular dynamics [8, 9]. The use of the apparatus of polymer mechanics is the most expedient, despite a number of limitations. Thus, the use of this approach requires information on the mechanical characteristics (e. g., elastic moduli, Poisson's ratio) of nanosized particles [10]. In effect, it is not always possible to determine the mechanical characteristics of nanosized particles. This is due to the fact that measurement of these characteristics is sometimes impossible due to the small diameter of nanosized particles. Mathematical methods for their prediction are often associated with the solution of inverse problems that require strict proof of the uniqueness of their solution, which is aggravated by the lack of a priori information about their mechanical characteristics. It should also be noted that the structure of nanosized particles may differ from the structure of microparticles of the same type, therefore, and the mechanical properties of these particles will also be different. Attempts to estimate the density of a mixture of particles and liquid were made on the basis of an analysis of the dependence of the refractive index on concentration [11, 12, 13], but they are based on extremely expensive instruments for measuring the central wavelength of a fiber Bragg grating. In this regard, the use of indirect methods for determining the approximate values of the physical and technical characteristics of nanosized particles, which in practice will limit the search area for solving inverse problems, is relevant.

One of the important parameters of nanosized particles is their density, knowing which one can determine the range of some of their mechanical characteristics. The purpose of this work is to develop a mathematical model for determining

в развитии математической модели определения плотности наноразмерных частиц на основе моделирования процесса их седиментации в растворе [14] и эмпирической информации о характерном времени их седиментации.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

На рисунке 1 а приведена схема измерительной системы, на которой показан источник лазерного излучения (Laser), проходящий через кварцевый контейнер с жидкостью и взвешенными в ней частицами (выделено зеленым), излучение которого принимается на фотодетекторе (PD). Обозначим высоту контейнера за  $H$ , диаметр лазерного луча обозначим за  $R$ , положение лазерного луча по вертикали за  $h$ . Выходной ток фотоприемника пропорционален расстоянию, пройденному через контейнер, оптической плотности жидкости с частицами и мощности исходного лазерного излучения. Для того чтобы исключить влияние мощности исходного лазерного излучения и расстояния, пройденного лучом через контейнер, а также потерь, вызванных при прохождении излучения через стенки контейнера, оптическое излучение перед контейнером делится на две части, одна из которых направляется в контейнер, а вторая мимо него. Измерения проводятся на дифференциальном фотоприемнике, который измеряет относительное затухание лазерного луча. Оптическая схема дифференциальных измерений для простоты на рисунке 1 а не показана. Здесь и далее подразумевается, что все измерения проводятся по дифференциальной схеме измерения

the density of nanosized particles based on modeling the process of their sedimentation in solution [14] and empirical information about the characteristic time of their sedimentation.

### MATHEMATICAL MODEL

Figure 1, a shows a diagram of the measuring system, which shows a laser radiation source (Laser) passing through a quartz container with liquid and particles suspended in it (highlighted in green), the radiation of which is received by a photodetector (PD). Let's denote the height of the container as  $H$ , the diameter of the laser beam as  $R$ , and the vertical position of the laser beam as  $h$ . The output current of the photodetector is proportional to the distance traveled through the container, the optical density of the liquid with particles, and the power of the initial laser radiation. In order to exclude the influence of the power of the initial laser radiation and the distance traveled by the beam through the container, as well as losses caused by the passage of radiation through the walls of the container, the optical radiation in front of the container is divided into two parts, one of which is directed into the container, and the second past him. The measurements are carried out on a differential photodetector that measures the relative attenuation of the laser beam. The optical layout for differential measurements is, for simplicity, shown in Figure 1, a not shown. Hereinafter, it is assumed that all measurements are carried out according to a differential measurement scheme

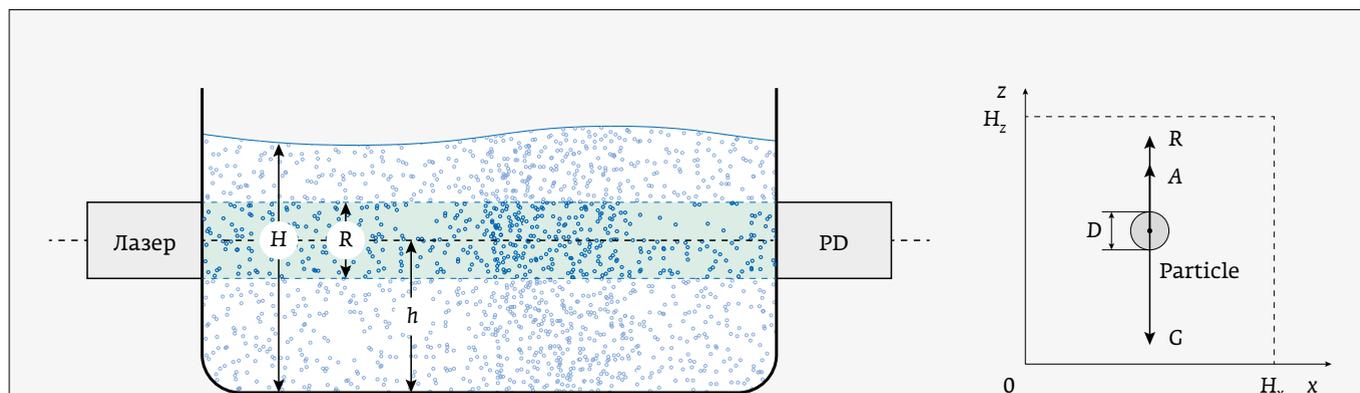


Рис. 1. Схема измерительной системы (а); силы, действующие на частицу в жидкости (b):  $G$  – сила тяжести,  $A$  – сила Архимеда,  $R$  – сила гидродинамического сопротивления жидкости,  $D$  – диаметр частицы

Fig. 1. Diagram of the measuring system (a); forces acting on a particle in a liquid (b):  $G$  is the force of gravity,  $A$  is the Archimedes force,  $R$  is the force of hydrodynamic resistance of the liquid,  $D$  is the particle diameter



относительного затухания. Исходя из измерений относительного затухания светового потока можно сделать вывод о концентрации частиц в жидкости [14, 15] и определить постоянную времени седиментации в процессе осаждения частиц.

Перед тем как сформулировать основные соотношения математической модели, сформулируем ряд допущений и предположений. Возникновение внутренних течений в жидкости увлекает за собой наноразмерные частицы и существенным образом влияет на их осаждение. Для того чтобы исключить влияние внутренних течений в жидкости на процесс осаждения наноразмерных частиц, предположим, что все измерения проводятся при стационарной температуре, то есть на всех внешних границах кюветы поддерживается одинаковая и постоянная температура. Это предположение сделано для того, чтобы исключить возникновение в жидкости внутренних течений, вызванных перепадом плотности из-за градиента температуры. На скорость осаждения частиц может влиять и диффузия частиц, вызванная градиентом их концентрации в жидкости. Предположим, что концентрация наноразмерных частиц в жидкости достаточно мала, емкость с смесью достаточно глубокая, лазерный луч контроля расположен вблизи верхней границы кюветы, а диаметр лазерного луча и его расстояние до верхней границы кюветы намного меньше высоты кюветы ( $H-h \ll H$  и  $R \ll H$ ). В условиях этого предположения можно считать, что концентрация наноразмерных частиц в области луча контроля до начала осаждения совпадает с их концентрацией непосредственно под лучом контроля в каждый момент времени. Таким образом, влияние диффузии на постоянную времени седиментации учитывается только на верхней границе осаждения наноразмерных частиц, где градиент концентрации заметен. Предположим также, что все наноразмерные частицы в жидкости имеют одинаковый размер и массу, и движение наноразмерных частиц в жидкости происходит под действием сил гравитации, гидростатической подъемной силы и гидродинамической силы сопротивления жидкости.

Воспользовавшись вторым законом Ньютона, запишем уравнение движение наноразмерных частиц в векторной форме:

$$M \frac{d\vec{W}}{dT} = \vec{P} + \vec{A} + \vec{F}, \quad (1)$$

где вектора  $\vec{A}$  – гидростатической подъемной силы Архимеда,  $\vec{P}$  – силы гравитации,  $\vec{F}$  – гидродинамической силы сопротивления жидкости,  $\vec{W}$  – скоро-

for relative attenuation. Based on the measurements of the relative attenuation of the light flux, it is possible to draw a conclusion about the concentration of particles in the liquid [14, 15] and determine the time constant of sedimentation during the deposition of particles.

Before formulating the basic relations of the mathematical model, let us formulate a number of assumptions and assumptions. The emergence of internal flows in a liquid entrains nanosized particles and significantly affects their sedimentation. In order to exclude the influence of internal flows in the liquid on the deposition of nanosized particles, we assume that all measurements are carried out at a stationary temperature, that is, the same and constant temperature is maintained at all external boundaries of the cell. This assumption was made in order to exclude the occurrence of internal flows in the liquid caused by the density difference due to the temperature gradient. The sedimentation rate of particles can also be affected by the diffusion of particles caused by the gradient of their concentration in the liquid. Let us assume that the concentration of nanosized particles in the liquid is sufficiently low, the container with the mixture is sufficiently deep, the laser control beam is located near the upper border of the cuvette, and the diameter of the laser beam and its distance to the upper border of the cuvette are much less than the height of the cuvette ( $H-h \ll H$  and  $R \ll H$ ). Under the conditions of this assumption, it can be assumed that the concentration of nanosized particles in the region of the control beam before the beginning of deposition coincides with their concentration directly under the control beam at each moment of time. Thus, the effect of diffusion on the sedimentation time constant is taken into account only at the upper boundary of the deposition of nanosized particles, where the concentration gradient is noticeable. Let us also assume that all nanoscale particles in a liquid have the same size and mass, and the movement of nanosized particles in a liquid occurs under the action of gravitational forces, hydrostatic lift and hydrodynamic drag force of the liquid.

Using Newton's second law, we write the equation of motion of nanosized particles in vector form:

$$M \frac{d\vec{W}}{dT} = \vec{P} + \vec{A} + \vec{F}, \quad (1)$$



сти и  $M$  – масса частицы,  $T$  – время. Выберем правостороннюю систему координат, направив ось  $oz$  вверх, ось  $ox$  вправо, и распишем систему уравнений, определив силы.

Сила гравитации в (1) зависит от массы частицы  $P = -Mg$ , где  $g$  – ускорение свободного падения, знак минус в силе гравитации обусловлен выбором направления оси  $oz$ .

Гидростатическая подъемная сила Архимеда направлена вдоль оси  $oz$  и противоположно направлена вектору силы тяжести. Согласно закону Архимеда, она равна весу жидкости, вытесненной частицей:

$$A = \rho_0 g V = \rho_0 g \frac{\pi}{6} D^3, \quad (2)$$

где  $V$  – объем частицы,  $D$  – ее диаметр, а  $\rho_0$  – плотность жидкости.

Сила сопротивления движению направлена против направления скорости частицы, зависит от квадрата ее скорости, плотности жидкости, площади поперечного сечения частицы и числа Рейнольдса, которое определяет вязкость жидкости. При малых числах Рейнольдса (для осаждения наноразмерных частиц в жидкости  $Re \approx 300$ ) сила сопротивления движению имеет вид [14]:

$$F = -3\mu\pi D_C (W + U), \quad (3)$$

где  $D_C$  – гидродинамический диаметр частицы, и  $U$  – диффузионная составляющая скорости, вызванная градиентом концентрации частиц в растворе. Знак минус в (3) определяет то, что сила гидродинамического сопротивления направлена против направления скорости движения частицы.

Подставив (2) и (3) в (1), получим уравнение движения частицы в естественных переменных:

$$M \frac{d(W + U)}{dT} = -Mg + \frac{\pi}{6} D^3 \rho_0 g - 3\mu\pi D_C (W + U). \quad (4)$$

Преобразуем (4), записав его в безразмерной форме, введя безразмерные  $w$  – скорость и  $\tau$  – время, определив характерные параметры задачи  $L_0$  – размер и  $T_0$  – время. После преобразований получим уравнение движения (4) в безразмерных переменных:

$$\frac{d(w + u)}{d\tau} = \alpha - \beta \cdot (w + u), \quad (5)$$

где  $u = U \cdot T_0 / L_0$  – безразмерная диффузионная составляющая скорости, а для безразмерных комплексов  $\alpha$  и  $\beta$  введены обозначения:

where vectors  $\vec{A}$  are the hydrostatic lifting force of Archimedes,  $\vec{P}$  are the forces of gravity,  $\vec{F}$  are the hydrodynamic drag force of the fluid,  $\vec{W}$  are the velocities, and  $M$  is the mass of the particle,  $T$  is the time. Let's choose a right-handed coordinate system, pointing the  $oz$  axis up, the  $ox$  axis to the right, and write out the system of equations, defining the forces.

The force of gravity in (1) depends on the mass of the particle  $P = -Mg$ , where  $g$  is the acceleration of gravity, the minus sign in the force of gravity is due to the choice of the direction of the  $oz$  axis.

Archimedes' hydrostatic lift is directed along the  $oz$  axis, and oppositely directed to the gravity vector. According to Archimedes' law, it is equal to the weight of the liquid displaced by the particle:

$$A = \rho_0 g V = \rho_0 g \frac{\pi}{6} D^3, \quad (2)$$

where  $V$  is the volume of a particle,  $D$  is its diameter, and  $\rho_0$  is the density of the liquid.

The force of resistance to motion is directed against the direction of the particle's velocity, depending on the square of its velocity, the density of the liquid, the cross-sectional area of the particle and the Reynolds number, which determines the viscosity of the liquid. At low Reynolds numbers (for the deposition of nanosized particles in a liquid,  $Re \approx 300$ ), the force of resistance to motion has the form [14]:

$$F = -3\mu\pi D_C (W + U), \quad (3)$$

where  $D_C$  is the hydrodynamic diameter of a particle, and  $U$  is the diffusion component of the velocity caused by the concentration gradient of particles in the solution. The minus sign in (3) determines that the force of hydrodynamic resistance is directed against the direction of the particle velocity.

Substituting (2) and (3) in (1), we obtain the equation of motion of a particle in natural variables:

$$M \frac{d(W + U)}{dT} = -Mg + \frac{\pi}{6} D^3 \rho_0 g - 3\mu\pi D_C (W + U). \quad (4)$$

We transform (4), writing it down in dimensionless form, introducing dimensionless  $w$  – velocity and  $\tau$  – time, determining the characteristic parameters of the problem  $L_0$  – size and  $T_0$  – time. After transformations, we obtain



$$\alpha = \alpha(\rho, \rho_0) = \left( \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) \frac{T_0^2 g}{L_0}, \quad \beta = \beta(\rho, D, D_C, \mu) = \frac{18\mu T_0 D_C}{\rho D^3}. \quad (6)$$

Безразмерные комплексы  $\alpha$  и  $\beta$  полностью определяют задачу, тут  $\rho_0$  – плотность жидкости,  $\rho$  – плотность и  $D$  – диаметр и  $D_C$  – гидродинамический диаметр частицы, а  $L_0$  и  $T_0$  – характерные расстояние и время. Безразмерный комплекс  $\alpha$  определяет влияние сил гравитации и гидростатической подъемной силы, а  $\beta$  – влияние сил гидродинамического сопротивления.

Характерные параметры задачи (6) можно выбрать произвольно. Вместе с тем можно потребовать их выбор таким образом, чтобы безразмерные комплексы  $\alpha$  и  $\beta$  были бы одного порядка, например,  $\alpha = \beta = 1$  [16]:

$$T_0 = \frac{\rho D^2}{18\mu}, \quad L_0 = \left( \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) T_0^2 g. \quad (7)$$

Решение уравнения (5) позволяет полностью определить зависимость скорости осаждения частиц от времени в предположении, что диффузионная составляющая скорости  $U$  не зависит от времени, а зависит лишь от градиента концентрации наноразмерных частиц в растворе вблизи области контроля, где концентрация частиц невелика:

$$w(\tau) = \frac{\alpha + \beta \cdot u}{\beta} + \left( w(0) - \frac{\alpha + \beta \cdot u}{\beta} \right) e^{-\beta \tau}. \quad (8)$$

Можно показать, что последнее слагаемое в (8) с ростом безразмерного времени есть очень быстро затухающая функция, и скорость осаждения практически мгновенно принимает максимальное значение:

$$w_{\text{Max}} = \frac{\alpha + \beta \cdot u}{\beta}. \quad (9)$$

Следовательно, можно считать, что все наноразмерные частицы в жидкости осаждаются с постоянной скоростью  $w_{\text{Max}}$ , определяемой соотношением (9).

Определим постоянную времени седиментации  $\tau_0$  как время, пройденное частицами от верхней границы кюветы до середины лазерного луча, которое можно записать исходя из геометрии задачи и скорости осаждения:

$$\begin{aligned} \tau_0(\rho, D, D_C, \rho_0, \mu) &= \frac{H-h}{w_{\text{Max}}} \cdot \frac{T_0}{L_0} = \\ &= \frac{(H-h) \cdot \beta(\rho, D, D_C, \mu)}{(\alpha(\rho, \rho_0) + \beta(\rho, D, D_C, \mu) \cdot U \cdot T_0 / L_0)} \cdot \frac{T_0}{L_0}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  являются функциями физических параметров задачи.

the equation of motion (4) in dimensionless variables:

$$\frac{d(w+u)}{d\tau} = \alpha - \beta \cdot (w+u), \quad (5)$$

where  $u = U \cdot T_0 / L_0$  is the dimensionless diffusion component of the velocity, and the designations are introduced for the dimensionless complexes  $\alpha$  and  $\beta$ :

$$\alpha = \alpha(\rho, \rho_0) = \left( \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) \frac{T_0^2 g}{L_0}, \quad \beta = \beta(\rho, D, D_C, \mu) = \frac{18\mu T_0 D_C}{\rho D^3}. \quad (6)$$

Dimensionless complexes  $\alpha$  and  $\beta$  completely determine the problem, here  $\rho_0$  is the density of the liquid,  $\rho$  is the density and  $D$  is the diameter and  $D_C$  is the hydrodynamic diameter of the particle, and  $L_0$  and  $T_0$  are the characteristic distance and time. The dimensionless complex  $\alpha$  determines the influence of the forces of gravity and hydrostatic lift, and  $\beta$  is the influence of the forces of hydrodynamic resistance.

The characteristic parameters of problem (6) can be chosen arbitrarily. At the same time, one can require their choice so that the dimensionless complexes  $\alpha$  and  $\beta$  would be of the same order, e. g.,  $\alpha = \beta = 1$  [16]:

$$T_0 = \frac{\rho D^2}{18\mu}, \quad L_0 = \left( \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) T_0^2 g. \quad (7)$$

The solution of equation (5) makes it possible to completely determine the dependence of the particle sedimentation rate on time under the assumption that the diffusion component of the velocity  $U$  does not depend on time, but depends only on the concentration gradient of nanosized particles in the solution near the control region, where the particle concentration is low:

$$w(\tau) = \frac{\alpha + \beta \cdot u}{\beta} + \left( w(0) - \frac{\alpha + \beta \cdot u}{\beta} \right) e^{-\beta \tau}. \quad (8)$$

It can be shown that the last term in (8) with increasing dimensionless time is a very rapidly decaying function, and the deposition rate almost instantly takes on a maximum value:

$$w_{\text{Max}} = \frac{\alpha + \beta \cdot u}{\beta}. \quad (9)$$

Therefore, we can assume that all nanosized particles in a liquid are deposited at a constant rate  $w_{\text{Max}}$ , determined by relation (9).

Let us define the sedimentation time constant  $\tau_0$  as the time passed by the particles from the upper boundary of the cuvette to the middle of



Для оценки влияния диффузионной составляющей скорости на скорость седиментации можно использовать эмпирические оценки. Микроскопические исследования позволяют определить геометрический радиус частиц. Произведенные оценки диаметра наноразмерных частиц для оксида алюминия методом динамического светорассеяния на электронном микроскопе показали, что диаметр наноразмерных частиц оксида алюминия оценивается величиной ~53,1 нм [17, 18]. Оценку гидродинамического радиуса можно провести методом динамического светорассеяния, а эффективный гидродинамический радиус рассчитать на основе анализа коэффициента диффузии по уравнению Стокса-Эйнштейна для сферических частиц  $R = k \cdot T / (6\pi h D)$ , где  $k$  – константа Больцмана,  $T$  – температура,  $h$  – динамическая вязкость жидкости. Наиболее вероятное значение гидродинамического диаметра наноразмерных частиц оксида алюминия в экспериментах оценивается величиной ~284 нм [17], коэффициент диффузии при этом оценивается в  $8,6 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2/\text{сек}$ , что дает оценку величины порядка диффузионной составляющей скорости  $\sim 10^{-11} - 10^{-11} \text{ м/с}$ , при оценке скорости осаждения наноразмерных частиц в стационарной жидкости  $\sim 10^{-7} - 10^{-8} \text{ м/с}$ . Следовательно, влиянием диффузионной составляющей скорости на постоянную времени осаждения можно пренебречь, поскольку она примерно на три порядка меньше скорости осаждения. Там же [17] даны оценки отношения гидродинамического и геометрического диаметров наноразмерных частиц – 5,3.

Относительную концентрацию частиц в области лазерного луча контроля можно связать с площадью поперечного сечения луча, закрываемую частицами. Считая поперечное сечение лазерного луча кругом и связав верхнюю границу осаждаемых частиц с максимальной скоростью осаждения  $w_{Max}$ , получим:

$$c(w\tau) = 1 - \frac{1}{\pi R^2} \int_{H-(h+R)}^{w\tau} \sqrt{R^2 - (\xi - h)^2} d\xi, \quad (11)$$

где  $c(w\tau)$  – относительная интенсивность светового потока,  $H$  – высота кюветы,  $h$  – высота положения лазерного луча,  $R$  – его радиус,  $w\tau$  – верхняя граница осаждаемых частиц. Зависимость (11) для относительной концентрации частиц в области луча контроля (11) приведена в условиях нормировки, когда за единицу принимается максимальная концентрация частиц (до осаждения), а за ноль – значение, когда верхняя граница частиц полностью прошла область луча контроля. Интеграл (11) может быть взят аналитически, тогда для  $c(w\tau)$  получим:

the laser beam, which can be written based on the geometry of the problem and the deposition rate:

$$\tau_0(\rho, D, D_G, \rho_0, \mu) = \frac{H-h}{w_{Max}} \cdot \frac{T_0}{L_0} = \frac{(H-h) \cdot \beta(\rho, D, D_G, \mu)}{(\alpha(\rho, \rho_0) + \beta(\rho, D, D_G, \mu)) \cdot U \cdot T_0 / L_0} \cdot \frac{T_0}{L_0}, \quad (10)$$

where  $\alpha$  and  $\beta$  are functions of the physical parameters of the problem.

Empirical estimates can be used to assess the effect of the diffusion component of the velocity on the sedimentation rate. Microscopic studies allow determining the geometric radius of the particles. The estimates of the diameter of nanosized particles for aluminum oxide by the method of dynamic light scattering on an electron microscope showed that the diameter of nanosized particles of aluminum oxide is estimated at ~53.1 нм [17, 18]. The hydrodynamic radius can be estimated by the method of dynamic light scattering, and the effective hydrodynamic radius can be calculated based on the analysis of the diffusion coefficient according to the Stokes-Einstein equation for spherical particles  $R = k \cdot T / (6\pi h D)$ , where  $k$  is the Boltzmann constant,  $T$  is temperature,  $h$  is dynamic viscosity of the liquid. The most probable value of the hydrodynamic diameter of nanosized aluminum oxide particles in experiments is estimated at ~284 нм [17], the diffusion coefficient is estimated at  $8.6 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2/\text{s}$ , which gives an estimate of the order of the diffusion velocity component  $\sim 10^{-11} - 10^{-11} \text{ м/с}$ , when assessing the deposition rate of nanosized particles in a stationary liquid  $\sim 10^{-7} - 10^{-8} \text{ м/с}$ . Therefore, the influence of the diffusion component of the velocity on the deposition time constant can be neglected, since it is approximately three orders of magnitude less than the deposition rate. The same work [17] gives the estimates for the ratio of the hydrodynamic and geometric diameters of nanosized particle, i. e. 5.3.

The relative concentration of particles in the area of the monitoring laser beam can be related to the cross-sectional area of the beam covered by the particles. Assuming the cross section of the laser beam to be a circle, and connecting the upper boundary of the deposited particles with the maximum deposition rate  $w_{Max}$ , we obtain

$$c(w\tau) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left( \arcsin\left(\frac{w\tau - h}{R}\right) + \frac{w\tau - h}{R} \sqrt{1 - \left(\frac{w\tau - h}{R}\right)^2} \right). \quad (12)$$

Выражение (12) позволяет построить относительное изменение концентрации в зависимости от времени. На рисунке 2 приведена зависимость кривой относительного изменения концентрации частиц в зоне лазерного луча в безразмерных переменных. Данные приведены для кюветы высотой 0,05 м, лазерный луч с диаметром 0,01 м, расположен на высоте 0,03 м.

На рисунке 3 приведены кривые прогнозируемых значений постоянной времени седиментации для частиц полимера (размером 50, 100, 150 нм) в зависимости от их плотности. По вспомогательной оси пунктирной линией того же цвета приведена максимальная скорость осаждения.

Как можно видеть из данных, приведенных на рисунке 3, скорость осаждения частиц линейно зависит от их плотности и возрастает с увеличением размера частиц. При этом постоянная времени седиментации нелинейно убывает с ростом плотности частиц, и для частиц большего диаметра постоянная времени седиментации меньше. Однако и в том, и в другом случае постоянная времени седиментации измеряется в сутках.

Полученные зависимости были частично подтверждены экспериментальными данными, полученными в КНИТУ-КАИ на кафедре электронных и квантовых средств передачи информации.

## ВЫВОДЫ

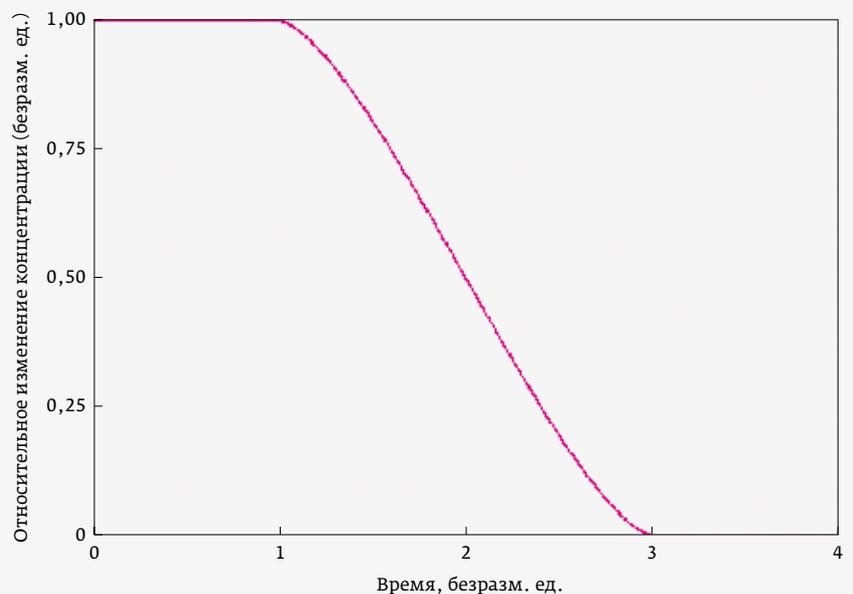
По результатам проведенной работы можно сформулировать следующие выводы. Была поставлена и решена задача по построению зависимости постоянной времени седиментации от плотности жидкости, коэффициента ее динамической вязкости, плотности и размеров осаждаемых частиц. Возможность измерения постоянной времени седиментации в ходе эксперимента позволяет однозначно определить плотность, а вместе с ним и молекулярный вес частиц при условии, что их

$$c(w\tau) = 1 - \frac{1}{\pi R^2} \int_{H-(h+R)}^{w\tau} \sqrt{R^2 - (\xi - h)^2} d\xi, \quad (11)$$

where,  $c(w\tau)$  is the relative intensity of the light flux,  $H$  is the height of the cuvette,  $h$  is the height of the position of the laser beam,  $R$  is its radius,  $w\tau$  is the upper boundary of the deposited particles. Dependence (11) for the relative concentration of particles in the area of the control beam (11) is given under normalization conditions, when the maximum concentration of particles (before sedimentation) is taken as a unit, and the value when the upper boundary of particles has completely passed area of the control beam. Integral (11) can be taken analytically, then for  $c(w\tau)$  we obtain:

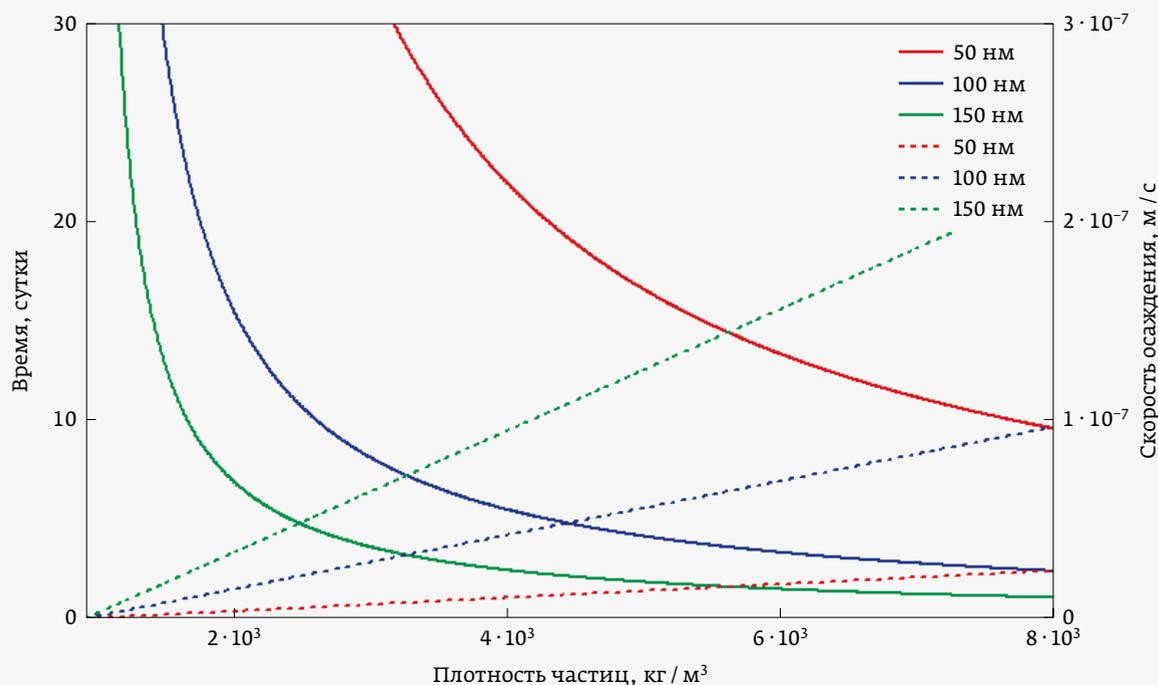
$$c(w\tau) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left( \arcsin\left(\frac{w\tau - h}{R}\right) + \frac{w\tau - h}{R} \sqrt{1 - \left(\frac{w\tau - h}{R}\right)^2} \right). \quad (12)$$

Expression (12) allows you to construct the relative change in concentration as a function of time. Figure 2 shows the dependence of the curve of the relative change in the concentration of particles in the zone of the laser beam in dimension-



**Рис. 2.** Относительное изменение концентрации частиц в зоне лазерного луча в безразмерных переменных

**Fig. 2.** Relative change in the concentration of particles in the zone of the laser beam in dimensionless variables



**Рис. 3.** Прогнозируемое значение постоянной времени седиментации и скорость осаждения в зависимости от плотности частиц для частиц с диаметром 50, 100 и 150 нм (непрерывной линией обозначены кривые времени осаждения; пунктирной – скорости осаждения для различных размеров частиц)

**Fig. 3.** Predicted sedimentation time constant and sedimentation rate as a function of particle density for particles with a diameter of 50, 100 and 150 nm (solid lines denote sedimentation time curves; dashed line denotes sedimentation rates for different particle sizes)

размеры известны. Одновременно с этим можно определить и размер частиц при условии, что известна их плотность. Эти данные должны быть полезны для экспериментаторов для верификации условий и результатов экспериментов по данным математической модели. Практическая значимость работы заключается в уточнении условий для проведения экспериментов по длительной седиментации. Предложенная математическая модель позволяет сократить время проведения экспериментов по оценке плотности наноразмерных частиц, не дожидаясь их полного осаждения.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (соглашение номер 075-03-2020-051/3 от 09.06.2020, номер темы fzsu-2020-0021) в части постановки физической задачи моделирования, верификации данных и полученных результатов и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение номер 075-03-2020-051, номер тему fzsu-2020-0020) в части построения математической модели и её реализации

less variables. The data are given for a cell with a height of 0.05 m, a laser beam with a diameter of 0.01 m, located at a height of 0.03 m.

Figure 3 shows the curves of the predicted values of the sedimentation time constant for polymer particles (size 50, 100, 150 nm) depending on their density. On the auxiliary axis, the dotted line of the same color shows the maximum deposition rate.

As can be seen from the data shown in Figure 3, the deposition rate of particles linearly depends on their density and increases with increasing particle size. At the same time, the sedimentation time constant decreases nonlinearly with increasing particle density, and for particles of larger diameter, the sedimentation time constant is less. However, in both cases, the sedimentation time constant is measured in days.

The obtained dependences were partially confirmed by the experimental data obtained at the A. N. Tupolev Kazan National Research Technical University at the Department of Electronic and Quantum Means of Information Transmission.



## REFERENCES

1. **Senthil Kumar M. S., Mohana Sundara Raju N., Sampath P. S. and Jayakumari L. S.** Effects of nanomaterials on polymercomposites – an expatiate view // *Rev. Adv. Mater. Sci.* 2014. No. 38. PP.40–54.
2. **Bogomolova O. Y., Biktagirova I. R., Danilaev M. P., Klabukov M. A., Polisky Y. E., Tsentsevitsky A. A., Pillai S.** Effect of adhesion between submicron filler particles and a polymeric matrix on the structure and mechanical properties of epoxy-resin-based compositions // *Mechanics of Composite Materials.* 2017. С. 117–122.
3. **Иржак Т. Ф., Иржак В. И.** Эпоксидные нанокомпозиты // *Высокомолекулярные соединения. Серия А.* 2017. Т. 59. No 6. С. 485–522.
4. **Черноус Д. А., Шилько С. В., Панин С. В.** Анализ механического поведения дисперсно – армированного нанокомпозита. метод расчета эффективных упругих характеристик // *Физическая мезомеханика.* 2010. Т. 13. № 4. С. 85
5. **Аскадский А. А., Кондращенко В. И.** Компьютерное моделирование полимеров. Т. 1 Атомно-молекулярный уровень. М.: Научный мир. 1999. 544 с.
6. **Katsunori Shimizua, Tomohiro Miyatab, Tomohiko Nagaob, Akemi Kumagaib et al.** Visualization of the tensile fracture behaviors at adhesive interfaces between brass and sulfur-containing rubber studied by transmission electron microscopy // *Polymer.* 2019. V.181. P. 1.
7. **Mohammad Alimardani, Mehdi Razzaghi-Kashani, Mir Hamid Reza Horeishy** Prediction of mechanical and fracture properties of rubber composites by microstructural modeling of polymer-filler interfacial effects // *Materials and Design.* 2017. V.115. P. 348.
8. **Chung I., Cho M.** Recent Studies on the Multiscale Analysis of Polymer Nanocomposites // *Multiscale Sci. Eng.* 2019. V.1. P. 167.
9. **Firooz S., Chatzigeorgiou G., Meraghni F., Javili A.** Bounds on size effects in composites via homogenization accounting for general interfaces // *Continuum Mechanics and Thermodynamics.* 2020. V.32. № 1. P. 173.
10. **Moghaddam H. A., Mertiny P.** Stochastic finite element analysis framework for modelling mechanical properties of particulate modified polymer composites // *Materials.* 2019. V.12. № 7. P. 1. DOI: 10.3390/ma12172777.
11. **Куревин В. В., Морозов О. Г., Морозов Г. А., Сахабутдинов А. Ж., Нуреев И. И.** Техническое обеспечение экологической безопасности территориально распределенных систем хранения опасных веществ // *Инженерный вестник Дона.* 2016. № 3 (42). С. 18.
12. **Морозов О. Г., Сахабутдинов А. Ж., Анфиногентов В. И., Аглиуллин Т. А., Туркенов А. К.** Уточнение центральной длины волны узких волоконных брэгговских решеток в условиях малой разрешающей способности оптического анализатора спектра и флукутирующем уровне мощности // *Вестник НЦБЖД.* 2020. № 2 (44). С. 160–166.

## ОБ АВТОРАХ

Хуссейн Сафаа Мохаммед Ридха Хуссейн, University of Karbala, Karbala, 56001, Iraq, safaa\_m333@yahoo.com.  
ORCID: 0000-0001-6022-0548

Куклин Владимир Александрович, Казанский федеральный университет, 420008 Российская Федерация, Татарстан, Казань, ул. Кремлевская, д. 18, инженер, iamkvova@gmail.com.  
ORCID 0000-0003-4254-5837, Scopus ID 57207815969, РИНЦ AuthorID: 783710

Салахутдинов Марат Шамильевич, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева, 420111 Российская Федерация, Татарстан, г. Казань, ул. К. Маркса, д. 10, студент, alladin76@yandex.ru - ответственный автор за переписку с редакцией .  
ORCID 0000-0001-5176-1334

Нуреев Ильнур Ильдарович, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева, 420111 Российская Федерация, Татарстан, г. Казань, ул. К. Маркса, д. 10, д. н. т., доц., проф. кафедры РФМТ, n2i2@mail.ru.  
Scopus ID 6505707818, РИНЦ AuthorID: 793421

## ВКЛАД АВТОРОВ

Концепция Нуреев И. И., Хуссейн С. М. Р. Х.; формальный анализ Нуреев И. И., Салахутдинов М. Ш.; взаимодействие по гранту Нуреев И. И., Куклин В. А.; исследования Хуссейн С. М. Р. Х.; методология Куклин В. А., Хуссейн С. М. Р. Х.; общее руководство Нуреев И. И.; написание и редактирование рукописи Салахутдинов М. Ш., Хуссейн С. М. Р. Х. Рукопись прочитана и одобрена всеми указанными авторами.

## CONCLUSIONS

Based on the results of the work carried out, the following conclusions can be formulated. The task of plotting the dependence of the sedimentation time constant on the density of the liquid, the coefficient of its dynamic viscosity, the density and size of the precipitated particles was set and solved. The possibility of measuring the sedimentation time constant during the experiment allows one to unambiguously determine the density, and with it, the molecular weight of the particles, provided that their sizes are known. At the same time, the size of the particles can be determined, provided that their density is known. These data should be useful for experimenters to verify the conditions and results of experiments using the data of the mathematical model. The practical significance of the work is to clarify the conditions for conducting experiments on long-term sedimentation. The proposed mathematical model makes it possible to reduce the time for conducting experiments to estimate the density of nanosized particles without waiting for their complete deposition.

## FUNDING

I. I. Nureev was funded by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-03-2020-051/3, topic No. fzs-2020-0021) in part of physical task formulation, mathematical model construction. V. A. Kuklin was funded by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-03-2020-051, topic No. fzs-2020-0020) in part of data and results verification, training and tuning, and realization.

## ABOUT AUTHORS

Hussein Safaa Mohammed Ridha Hussein, University of Karbala, Karbala, 56001, Iraq, safaa\_m333@yahoo.com.  
ORCID:0000-0001-6022-0548

Kuklin Vladimir Alexanrovich, Kazan Federal University, 18 Kremlyovskaya street, Kazan 420008, Russian Federation, iamkvova@gmail.com.

Salakhutdinov Marat Shamilevich, Kazan National Research Technical University n. a. A. N. Tupolev, 10, K. Marx St., Kazan, Tatarstan 420111, Russia, alladin76@yandex.ru – corresponding author.  
ORCID 0000-0001-5176-1334

Nureev Ilnur Ildarovich, Kazan National Research Technical University n. a. A. N. Tupolev, 10, K. Marx St., Kazan, Tatarstan 420111, Russia, n2i2@mail.ru.

## AUTHOR CONTRIBUTIONS

Conceptualization Nureev I. I. and Hussein S. M. R. H.; Formal analysis Nureev I. I., and Salakhutdinov M. Sh.; Funding acquisition Nureev I. I., Kuklin V. A.; Investigation Hussein S. M. R. H.; Methodology, Kuklin V. A., Hussein S. M. R. H.; Supervision Nureev I. I.; Writing-review & editing Salakhutdinov M. Sh, Hussein S. M. R. H. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

## ПЛАН ВЫХОДА ЖУРНАЛА НА 2021 ГОД

Номер	Выставки и мероприятия, которые поддерживает журнал	
<b>8/20</b> Статьи: Реклама: Выход: 01/2021	<b>27-29/01</b> Международная конференция по фотонике и информационной оптике, НИЯУ МИФИ <b>2022</b> Конференция по аддитивным технологиям в промышленности 3D fab+print, Экспоцентр <b>13-15/02</b> Камский промышленный форум. Машиностроение. Metalloobrabotka. Metalurgiya. Svarka, Naberezhnye Chelny <b>26-28/02</b> РОССИЙСКИЙ ПРОМЫШЛЕННЫЙ ФОРУМ, Уфа <b>03-04/03</b> ПромТехЭкспо, Омск <b>03-04/03</b> Арктика-2021, Москва, Торгово-промышленная палата РФ <b>09-12/03</b> XXV симпозиум «Нанопластика и наноэлектроника», Нижний Новгород <b>16-19/03</b> Metalloobrabotka. Svarka, Ekaterinburg <b>23-26/03</b> VII Международная конференция Лазерные, плазменные исследования и технологии ЛаПлаз 2021, МИФИ	
	<b>1/21</b> Статьи: 12/02 Реклама: 15/03 Выход: 23/03	<b>30/03-02/04</b> ФОТОНИКА. Мир лазеров и оптики, Москва, Экспоцентр <b>30/03-02/04</b> MashExpo Siberia, Новосибирск <b>30/03-04/04</b> Конференция «Квантовая информатика — 2021» <b>06-09/04</b> Машиностроение. Сварка. Metalloobrabotka, Минск
	<b>2/21</b> Статьи: 12/03 Реклама: 04/04 Выход: 12/04	<b>13-15/04</b> ЭкспоЭлектроника, МВЦ Крокус Экспо <b>13-14/04</b> Аналитика Экспо, Москва <b>13-16/04</b> SECURICA, Москва, Крокус Экспо <b>21-23 /04</b> Петербургская техническая ярмарка, Санкт-Петербург <b>19-21/05</b> Metrol Expo, Крокус Экспо
	<b>3/21</b> Статьи: 15/04 Реклама: 11/05 Выход: 17/05	<b>24-28/05</b> Metalloobrabotka, Москва Экспоцентр <b>25-28/05</b> Международная Школа-Конференция «Saint-Peterburg OPEN» по Оптоэлектронике, Фотонике и Наноструктурам, СПбАН РАН <b>15-17/06</b> Rosmould Форум Аддитивных технологий, Крокус Экспо <b>15-18/06</b> Связь. Навитех, Москва Экспоцентр <b>Перенос на 2022 г.</b> 25-я Международная выставка LASER WORLD of Photonics, Мюнхен <b>22-24/06</b> RENWEX Возобновляемая энергетика, Москва Экспоцентр <b>23-27/06</b> Военно-морской салон, Санкт-Петербург
	<b>4/21</b> Статьи: 24/05 Реклама: 11/06 Выход: 25/06	<b>05-09/07</b> XXVII Международный симпозиум «Оптика атмосферы и океана. Физика атмосферы» <b>06-09/07</b> Иннопром, Екатеринбург <b>20-27/07</b> МАКС, Жуковский <b>21/08</b> V Международная конференция по аддитивным технологиям, Технопарк Калибр <b>22-38/08</b> Армия, КВЦ «Патриот» <b>24-25/08</b> SEMIEXPO Russia, Москва Экспоцентр <b>25-27/08</b> Технопром, Новосибирск

## ПЛАН ВЫХОДА ЖУРНАЛА НА 2021 ГОД

Номер	Выставки и мероприятия, которые поддерживает журнал
<b>5/21</b> Статьи: 23/07 Реклама: 20/08 Выход: 03/09	09 Международная конференция «Лазерно-информационные технологии в медицине, биологии и геоэкологии», Новороссийск
	07-09/09 ЭкспоКонтроль, Москва, Экспоцентр
	12-17/09 XV Международная конференция по импульсным лазерам и применениям лазеров AMPL-2021, Томск
	18-21/09 Реклама, Москва
	09 Системы наблюдения, мониторинга и дистанционного зондирования Земли, Геленджик
	20-22/09 Лучевые технологии и применение лазеров, Санкт-Петербург
	20-23/09 Международная конференция «Голография Экспо», Геленджик
	20-24/09 Международная конференция «Информационные технологии и нанотехнологии» ИТНТ, Самара
	09 Микроэлектроника, Ялта
	21-24/09 Промышленный салон, Самара
	09 International Conference on Ultrafast Optical Science (UltrafastLight-2019), Москва
5-8/10 ВКВО, Пермь	
<b>6/21</b> Статьи: 02/09 Реклама: 27/09 Выход: 04/10	7-8/10 Международная конференция «Аддитивные технологии: настоящее и будущее», Москва, ВИАМ
	12-15/10 Weldex/Россварка, Сокольники
	18-21/10 Технофорум, Экспоцентр
	19-21/10 Форум «Открытые инновации», Сколково
	19-21/10 Интерполитех, ВДНХ
	22-24/10 Силовая Электроника, МВЦ Крокус Экспо
	26-28/10 Testing & Control, МВЦ Крокус Экспо
	26-28/10 ВакуумТехЭкспо, Москва
	10 XXX Международная конференция «Лазеры в науке, технике, медицине»
	<b>7/21</b> Статьи: 01/10 Реклама: 25/10 Выход: 03/11
24-26/11 Сибирский промышленный форум. Выставка Металлообработки и сварки, Красноярск	
11 Всероссийская открытая конференция «Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса», Москва, Институт космических исследований РАН	
11 XVI Всероссийский молодежный «Самарский конкурс-конференция научных работ по оптике и лазерной физике», Самара	
11 Воронежский промышленный форум-выставка, Воронеж	
11 Оптика и биофотоника, Саратов	
12 Машиностроение. Металлообработка. Техносварка, Казань	
<b>8/21</b> Статьи: 28/10 Реклама: 22/11 Выход: 02/12	12 ВузпромЭкспо
	12 Здравоохранение
	01/2022 Международная конференция по фотонике и информационной оптике, МИФИ
	12 Камский промышленный форум. Машиностроение. Металлообработка. Металлургия. Сварка, Набережные Челны
	12 Российский промышленный форум, Уфа



Стоимость 2200 р. за номер  
Периодичность: 10 номеров в год  
[www.electronics.ru](http://www.electronics.ru)



Стоимость 1430 р. за номер  
Периодичность: 8 номеров в год  
[www.photonics.ru](http://www.photonics.ru)



Стоимость 1430 р. за номер  
Периодичность: 6 номеров в год  
[www.j-analytics.ru](http://www.j-analytics.ru)

# ПОДПИСКА НА ЖУРНАЛЫ

[www.technosfera.ru](http://www.technosfera.ru)



Стоимость 1056 р. за номер  
Периодичность: 8 номеров в год  
[www.lastmile.ru](http://www.lastmile.ru)



Стоимость 1287 р. за номер  
Периодичность: 8 номеров в год  
[www.nanoindustry.ru](http://www.nanoindustry.ru)



Стоимость 1716 р. за номер  
Периодичность: 4 номера в год  
[www.stankoinstrument.ru](http://www.stankoinstrument.ru)